

2634

B. Sc./B. Ed. (Integrated) Second Year Examination, 2019

MATHEMATICS - I

(Abstract Algebra)

Time: Three Hours

Maximum Marks: 60

Instructions –

Attempt **five** questions in all, selecting at least **one** question from each unit. The answer of essay type questions should not be more than **400** words and short answer type of questions in not more than **150** words. All questions carry equal marks.

निर्देश –

प्रत्येक इकाई में से कम-से-कम **एक** प्रश्न का चयन करते हुए, कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। निबन्धात्मक प्रश्न का उत्तर अधिकतम **400** शब्दों में और लघुत्तरात्मक प्रश्न का उत्तर अधिकतम **150** शब्दों में लिखिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

UNIT – I/ इकाई – I

Q.1 (a) What is definition of Relation? What are the kinds of Relation? Explain with example.

सम्बन्ध की परिभाषा क्या है? ये कितने प्रकार के होते हैं? उदाहरण सहित व्याख्या करो।

(b) Show that the set Q^+ of the positive rational numbers forms an abelian group for the operation $*$ defined as-

$$a * b = \frac{ab}{2}, \forall a, b \in Q^+$$

सिद्ध करो कि धनात्मक परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q^+ संक्रिया $*$ के लिये एक क्रमविनिमेय ग्रुप है-

$$a * b = \frac{ab}{2}, \forall a, b \in Q +$$

OR/ अथवा

(a) Show that-

for any element 'a' of a group G:

$$0(a) = 0(x^{-1}ax), \forall x \in G$$

सिद्ध करो-

एक ग्रुप G के लिए किसी अवयव a के लिए-

$$0(a) = 0(x^{-1}ax) \forall x \in G$$

(b) Prove that $H = \{a + ib \mid a, b \in Q\}$ is a subgroup of the group $(c, +)$.

सिद्ध करो कि $H = \{a + ib \mid a, b \in Q\}$ समूह $(c, +)$ का उपसमूह है।

UNIT - II/ इकाई - II

Q.2 If $\sigma = (17263584)$ and $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

then prove that-

$$\rho \sigma \rho^{-1} = (\rho_{(1)}\rho_{(7)}\rho_{(2)}\rho_{(6)}\rho_{(3)}\rho_{(5)}\rho_{(8)}\rho_{(4)})$$

यदि $\sigma = (17263584)$ और $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

तो सिद्ध करो- $\rho \sigma \rho^{-1} = (\rho_{(1)}\rho_{(7)}\rho_{(2)}\rho_{(6)}\rho_{(3)}\rho_{(5)}\rho_{(8)}\rho_{(4)})$

OR/ अथवा

(a) Prove that-

“Every group is an isomorphic to permutation group”

or $G \cong PA$

प्रत्येक ग्रुप एक क्रमचय समूह के तुल्यकारी होता है।

(b) If 'f' is a homomorphism from a group G to G' and if e and e' be their respective identities. Then prove that-

$$f(a^{-1}) = [f(a^{-1})]^{-1}$$

यदि 'f' ग्रुप G से G' पर एक समकारिता हो तथा e और e' क्रमशः तत्समक हों, तो सिद्ध करो-

$$f(a^{-1}) = [f(a^{-1})]^{-1}$$

UNIT – III / इकाई – III

Q.3 (a) Prove that-

A sub group H of a group G, is a normal subgroup of G iff the product of two right (left) cosets of H in G is again a right (left) cosets of H in G.

किसी ग्रुप G के लिए उपग्रुप H एक प्रसामान्य उपग्रुप होता है यदि और केवल यदि G में H के किन्हीं दो दक्षिण (वाम) सह समुच्चयों का गुणन H का एक दक्षिण (वाम) उपसमुच्चय है।

(b) Find the quotient group G/H also prepare its operation table when $G = (Z,+)$, $H = (4Z,+)$

विभाग ग्रुप G/H ज्ञात करें एवं इसकी संक्रिया सारणी भी बनाइये जबकि $G = (Z,+)$, $H = (4Z,+)$

OR / अथवा

Prove that-

Every homomorphic image of a group G is isomorphic to some quotient group of G.

किसी ग्रुप G का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब, G के किसी विभाग ग्रुप के तुल्यकारी होता है।

UNIT – IV / इकाई – IV

Q.4 (a) What is definition of Ring? Show that for any element a,b,c of a ring R:

रिंग की परिभाषा लिखिए और सिद्ध कीजिए। किसी रिंग R के किन्हीं अवयवों a,b,c के लिए—

(i) $a0 = 0a = 0.$

(ii) $a(-b) = -(ab) = (-a) b.$

(iii) $(-a) (-b) = ab.$

(iv) $a(b-c) = ab - ac.$

(v) $(b-c) a = ba - ca.$

(b) Prove that-

A ring R is without zero divisor iff the cancellation law holds in R.

कोई वलय शून्य भाजक रहित है यदिदि (\Leftrightarrow) R में निरसन नियम सत्य है।

OR / अथवा

Prove that-

the set $s = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$ is a subfield of the field $(R, +, x)$ of Real Numbers.

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $s = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र $(\mathbb{R}, +, \times)$ का एक उपक्षेत्र है।

UNIT – V / इकाई – V

Q.5 (a) the set of all 2×2 matrices of the form $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $a, b \in \mathbb{Z}$ is a right ideal but not a left ideal of the ring R of all 2×2 matrices over the set \mathbb{Z} of integers.

$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $a, b \in \mathbb{Z}$ आकार के सभी मैट्रिसेज का समुच्चय s , पूर्णाकों पर सभी 2×2 कोटि के मैट्रिसेज के वलय में एक दक्षिण गुणजावली है, परन्तु वामा गुणजावली नहीं।

(b) Prove that-

“The intersection of any two ideals of a ring is again an ideal of the ring”

“किसी वलय की दो गुणजावलियों का सर्वनिष्ठ भी उस वलय की गुणजावली होती है।”

OR / अथवा

(a) The ring of Gaussian integers is a Euclidean ring.

गाउस पूर्णाकों का वलय यूक्लिडीय वलय है।

(b) Show that the polynomial $x^2 + x + 4$ is irreducible over f , the field of integers (mod 11).

प्रदर्शित कीजिए कि बहुपद $x^2 + x + 4$ पूर्णाकों के फील्ड (mod 11) f पर अखण्डनीय है।
