

**1225**  
**I YEAR (T.D.C.) SCIENCE EXAMINATION, 2018**

**MATHEMATICS**

**Paper – I**

**ALGEBRA**

Time: Three Hours  
Maximum Marks: 75

**PART – A (खण्ड – अ)**

[Marks: 20]

*Answer all questions (50 words each).*

*All questions carry equal marks.*

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 50 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

**PART – B (खण्ड – ब)**

[Marks: 35]

*Answer five questions (250 words each).*

*Selecting one from each unit. All questions carry equal marks.*

प्रत्येक इकाई से एक-एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए।

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

**PART – C (खण्ड – स)**

[Marks: 20]

*Answer any two questions (300 words each).*

*All questions carry equal marks.*

कोई दो प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 300 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

## PART – A / खण्ड – अ

### UNIT -I/ इकाई – I

Q.1 (i) Find the rank of the matrix -

निम्न मैट्रिक्स की कोटि ज्ञात कीजिये –

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 9 & 12 & 9 \\ -1 & -3 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

(ii) Show that the following matrix A is a orthogonal matrix –

प्रदर्शित कीजिये कि निम्न मैट्रिक्स A लाम्बिक मैट्रिक्स है –

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

### UNIT -II/ इकाई – II

(iii) Solve the equation  $x^3 - 7x^2 + 36 = 0$ , given that one root is double of the other.

समीकरण  $x^3 - 7x^2 + 36 = 0$  को हल कीजिये जबकि एक मूल दूसरे का दुगुना हो।

(iv) Transform the equation into an equation whose roots are four times those of given equation-

निम्न समीकरण को एसी समीकरण में रूपान्तरित करो जिसके मूल दिये गये समीकरण के

चार गुना हो –

$$3x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$$

### UNIT -III / इकाई - III

(v) Define a abelian group.

आबेली समूह को परिभाषित कीजिये।

(vi) Express the following permutation as product of disjoint cycles -

निम्न क्रमचय को असंयुक्त चक्र के गुणन के रूप में व्यक्त कीजिये -

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 8 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

### UNIT -IV / इकाई - IV

(vii) If  $H = \{1, -1\}$  and  $G = \{1, -1, i, -i\}$  then find different cosets of  $H$  in  $G$ .

यदि  $H = \{1, -1\}$  तथा  $G = \{1, -1, i, -i\}$  हो तो समूह  $G$  में  $H$  के विभिन्न सह कुलक ज्ञात कीजिये।

(viii) Define a quotient group.

विभाग समूह को परिभाषित कीजिये।

### UNIT -V / इकाई - V

(ix) Define Kernel of homomorphism.

समाकारिता की अष्टि को परिभाषित कीजिये।

(x) Show that the mapping  $f: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, \times)$ ;  $f(x) = 2^x \forall x \in \mathbb{R}$  is a homomorphism.

दिखाए की मानचित्रण  $f: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, \times)$ ;  $f(x) = 2^x \forall x \in \mathbb{R}$  एक समाकारिता है।

## PART – B / खण्ड – ब

### UNIT –I / इकाई – I

Q.2 Reduce the following matrix in normal form and find its rank –

निम्न मैट्रिक्स को अभिलम्ब रूप में समानीत कर इसकी कोटि ज्ञात कीजिये –

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Q.3 Apply matrix theory to solve the following system of equation -

मैट्रिक्स सिद्धांत का प्रयोग कर निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिये –

$$2x - y + 3z = 8$$

$$-x + 2y + z = 4$$

$$3x + y - 4z = 0$$

### UNIT –II / इकाई – II

Q.4 Find the condition that the roots of the equation  $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$  may be in A.P.

वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिये जबकि समीकरण  $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$  के मूल समान्तर श्रेणी में हों।

Q.5 Find the equation whose roots are increased by 2 than the roots of the equation

$$4x^5 - 2x^3 + 7x - 3 = 0$$

वह समीकरण ज्ञात कीजिये जिसके मूल समीकरण  $4x^5 - 2x^3 + 7x - 3 = 0$  के मूलों से 2 ज्यादा हों।

### UNIT -III / इकाई - III

Q.6 If  $S$  is the set of real numbers other than  $-1$ , then show that  $(S, \bullet)$  is a group where ' $\bullet$ ' is the operation defined as –

$$a \bullet b = a + b + ab \quad \forall a, b \in S.$$

यदि  $S$  वास्तविक संख्याओं का समुच्चय हो जिसमें  $-1$  नहीं है तो द्विआधारी संक्रिया ' $\bullet$ ' के लिये सिद्ध कीजिये कि  $(S, \bullet)$  एक समूह है जहाँ ' $\bullet$ ' निम्न प्रकार परिभाषित है –

$$a \bullet b = a + b + ab \quad \forall a, b \in S$$

Q.7 Prove that the union of two sub group is a subgroup if one is contained in the other.

सिद्ध कीजिये कि किसी समूह के दो उपसमूहों का संघ एक उपसमूह होता है यदि और केवल यदि एक दूसरे में अंतर्विष्ट हो।

### UNIT -IV / इकाई - IV

Q.8 A subgroup  $H$  of a group  $G$  is a normal subgroup if each left coset of  $H$  is a right coset of  $H$  i.e.

$$H \Delta G \Leftrightarrow xH = Hx$$

किसी समूह  $G$  का कोई उपग्रुप  $H$  एक विशिष्ट उपसमूह होता है यदि और केवल यदि प्रत्येक वाम सहसमुच्चय दक्षिण सहसमुच्चय है अर्थात्

$$H \Delta G \Leftrightarrow xH = Hx$$

Q.9 Show that every quotient group of an abelian group is abelian but not conversely.

प्रदर्शित कीजिये कि एक आबेली समूह का विभाग समूह भी आबेली होता है परंतु विलोम सत्य नहीं है।

## UNIT -V / इकाई - V

Q.10 A homomorphism  $f$  defined from a group  $G$  to a group  $G'$  is a monomorphism if

$\text{Ker } f = \{e\}$ , where  $e$  is identity of  $G$ .

एक ग्रुप  $G$  की समाकारिता  $f$ , ग्रुप  $G$  में एकैकी है यदि और केवल यदि  $f$  की अष्टि  $= \{e\}$ ,

जहाँ  $e$ ,  $G$  में तत्समक है।

Q.11 Prove that every finite group is isomorphic to some permutation group.

सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक परिमित समूह किसी क्रमचय समूह के तुल्यकारिक होता है।

## PART - C / खण्ड- स

### UNIT -I / इकाई - I

Q.12 Find the eigen values and corresponding eigen vectors of the matrix.

निम्न मैट्रिक्स के अभिलाक्षणित मूल तथा संगत सदिशों को ज्ञात कीजिये।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

### UNIT -II / इकाई - II

Q.13 Solve the following equation by Cardano's Methods -

कॉर्डनो विधि द्वारा निम्न समीकरण को हल करो -

$$x^3 - 15x^2 - 33x + 847 = 0$$

### UNIT -III / इकाई - III

Q.14 If order of an element of a group  $(G,*)$  is  $n$  then  $a^m = e$  if  $m$  is a multiple of  $n$ . Also

find order of each element of multiplicative group  $(1, -1, i, -i)$

यदि किसी समूह  $(G, *)$  के अवयव  $a$  की कोटि  $n$  हो तो दर्शाईये कि  $a^m = e$  यदि और केवल

यदि  $m, n$  का गुणन हो तथा गुणन संक्रिया के लिये समूह  $(1, -1, i, -i)$  के हर अवयव की कोटि

ज्ञात कीजिये।

### UNIT -IV / इकाई - IV

Q.15 State and prove Lagrange's theorem.

लेग्रान्ज प्रमेय का कथन लिखकर सत्यापित कीजिये।

### UNIT -V / इकाई - V

Q.16 Prove that every homomorphism image of a group  $G$  is isomorphic to some quotient group of  $G$ .

सिद्ध कीजिये कि किसी समूह  $G$  का समाकारी प्रतिबिम्ब उस समूह के विभाग समूह के तुल्यकारी

होता है।

-----