

2225

B.Sc. SECOND YEAR EXAMINATION, 2019

MATHEMATICS

Paper – I

Advanced Calculus

Time: Three Hours

Maximum Marks: 75

PART – A (खण्ड – अ)

[Marks: 20]

Answer all questions (50 words each).

All questions carry equal marks.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 50 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART – B (खण्ड – ब)

[Marks: 35]

Answer five questions (250 words each).

Selecting one from each unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई से एक-एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए।

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART – C (खण्ड – स)

[Marks: 20]

Answer any two questions (500 words each).

All questions carry equal marks.

कोई दो प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 500 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART – A / खण्ड– अ

Q.1 (i) Write Cauchy's definition of continuity.

सांतत्य की कोशी वाली परिभाषा लिखिए।

(ii) Define discontinuity. Write types of discontinuity.

असांतत्यता को परिभाषित कीजिए। असांतत्यता के प्रकार लिखिए।

(iii) Define Homogeneous function.

समघात फलन को परिभाषित कीजिए।

(iv) Define Composite functions.

संयुक्त फलन को परिभाषित कीजिए।

(v) Write any one property of double integral.

द्विसमाकलन का कोई एक प्रगुण लिखिए।

(vi) Define Triple integral.

त्रिसमाकल को परिभाषित कीजिए।

(vii) Define Jacobian.

जेकोबियन को परिभाषित कीजिए।

(viii) If $r = a \cos t \hat{i} + a \sin t \hat{j} + t \hat{k}$, then evaluate $-\left|\frac{d^2r}{dt^2}\right|$

यदि $r = a \cos t \hat{i} + a \sin t \hat{j} + t \hat{k}$, तो मान ज्ञात कीजिए $-\left|\frac{d^2r}{dt^2}\right|$

(ix) Write the value of –

$$\int \left(a \times \frac{dr}{dt} \right) dt$$

मान ज्ञात कीजिए –

$$\int \left(a \times \frac{dr}{dt} \right) dt$$

(x) If $f \cdot df = 0$, show that the f is a constant vector.

यदि $f \cdot df = 0$, तो प्रदर्शित कीजिए कि f एक अचर सदिश है।

PART – B / खण्ड– ब

UNIT -I/ इकाई – I

Q.2 Examine for continuity the following function at $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

निम्न फलन की $x = 0$ पर सातत्यता की जांच कीजिए—

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

OR/अथवा

Q.3 Examine for differentiability of the function $f(x) = |x - 2| + 2|x - 3|$ in the interval

[1, 4].

फलन $f(x) = |x - 2| + 2|x - 3|$ की अन्तराल [1, 4] में अवकलनीयता की जाँच कीजिए।

UNIT -II/ इकाई – II

Q.4 If $u = e^{xyz}$, then prove that –

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2) e^{xyz}$$

यदि $u = e^{xyz}$, तो सिद्ध कीजिए –

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2) e^{xyz}$$

OR/अथवा

Q.5 Find the envelope of the family of the following straight lines, α being the parameter.

निम्न सरल रेखा के कुल का अन्वालोप ज्ञात कीजिए, जहाँ α प्राचल है—

$$ax \sec\alpha - by \operatorname{cosec}\alpha = a^2 - b^2$$

UNIT -III/ इकाई - III

Q.6 Evaluate –

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{dx dy}{1+x^2+y^2}$$

मान ज्ञात कीजिए –

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{dx dy}{1+x^2+y^2}$$

OR/अथवा

Q.7 Evaluate –

$$\int_0^a \int_0^x \int_0^{x+y} e^{x+y+z} dx dy dz$$

मान ज्ञात कीजिए –

$$\int_0^a \int_0^x \int_0^{x+y} e^{x+y+z} dx dy dz$$

UNIT -IV/ इकाई - IV

Q.8 If $x = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$, then find the value of –

(a) $\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}$ (b) $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$

यदि $x = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$, तो मान ज्ञात कीजिए –

(a) $\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}$ (b) $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$

OR/अथवा

Q.9 If $r = xi + yj + zk$ and $r = |r|$, then prove that -

यदि $r = xi + yj + zk$ और $r = |r|$, तो सिद्ध कीजिए –

(i) $\nabla f(r) = f'(r) \nabla r$ (ii) $\nabla \log |r| = \frac{1}{r^2} r$

UNIT -V/ इकाई - V

Q.10 Evaluate $\int_C F \cdot dr$ where $F = (x^2 + y^2) i - 2xyj$ and the curve C is the rectangle in the xy – plane bounded by $y = 0$, $x = a$, $y = b$, $x = 0$.

$\int_C F \cdot dr$ का मान ज्ञात कीजिए जबकि $F = (x^2 + y^2) i - 2xyj$ तथा वक्र C, xy – तल में $y = 0$, $x = a$, $y = b$, $x = 0$ द्वारा निर्मित आयत हैं।

OR/अथवा

Q.11 Find the volume of the region common to the inter-sectioning cylinders $x^2 + y^2 = a^2$ and $z^2 + x^2 = a^2$.

प्रतिच्छेदी बेलन $x^2 + y^2 = a^2$ तथा $z^2 + x^2 = a^2$ के उभयनिष्ठ भाग का आयतन ज्ञात कीजिए।

PART – C / खण्ड– स

Q.12 If a function f is continuous in a closed interval $[a, b]$, then prove that it is bounded in that interval.

यदि फलन f संवृत अन्तराल $[a, b]$ में संतत हो, तो सिद्ध कीजिए कि वह उस अन्तराल में परिबद्ध होता है।

Q.13 Find the maximum value of the following function-

$$u = \sin x \sin y \sin(x + y)$$

निम्न फलन का उच्चतम मान ज्ञात कीजिए –

$$u = \sin x \sin y \sin(x + y)$$

Q.14 Evaluate –

$$\iint_R (x + y)^2 dx dy$$

where R is the region of integration given below:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

मान ज्ञात कीजिए –

$$\iint_R (x + y)^2 dx dy$$

जहाँ R समाकलन का क्षेत्र निम्न दीर्घवृत्त है :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Q.15 If f is a Solenoidal Vector, then Show that : $\text{Curl Curl Curl Curl } f = \nabla^2 \nabla^2 f = \nabla^4 f$

यदि f परिनालिका सदिश है, तो सिद्ध कीजिए कि $-\text{Curl Curl Curl Curl } f = \nabla^2 \nabla^2 f = \nabla^4 f$.

Q.16 Evaluate $\iint_S [(x + z)dy dz + (y + z)dz dx + (x + y)dx dy]$ where S is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

$\iint_S [(x + z)dy dz + (y + z)dz dx + (x + y)dx dy]$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ S गोले का $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ पृष्ठ है।
