Roll No. : .... Total Pages : 8

MAT8772T

M.Sc. FIRST SEMESTER (NEP) EXAMINATION, 2023-24

MATHEMATICS

Paper : Fifth

Advanced Calculus

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 80

PART-A/ भाग-अ *[Marks :16]*

*Answer all **eight** questions (Maximum **50** words each).*
***All** questions carry **equal** marks.*

*सभी आठ प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **50** शब्दों से अधिक न हो।*
सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART-B/ भाग-ब *[Marks :40]*

*Answer **five** questions (Maximum **250** words each)*
*selecting one from each unit. **All** questions carry **equal** marks.*

*प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **250** शब्दों से अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।*

PART-C/ भाग-स *[Marks :24]*

*Answer **any two** questions (Maximum **300** words each).*
***All** questions carry **equal** marks.*

*किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **300** शब्दों से अधिक न हो।*
सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART-A/ भाग-अ

1. Answer all questions.

सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(i) Write the necessary and sufficient conditions for $f(a,b)$ to be a maximum value of function $f(x,y)$.

फलन $f(x,y)$ के अधिकतम मान $f(a,b)$ होने का आवश्यक व पर्याप्त प्रतिबन्ध लिखिए।

(ii) State the implicit function theorem.

अस्पष्ट फलन प्रमेय का कथन लिखिए।

(iii) Write the geometrical interpretation of gradient.

प्रवणता का ज्यामितीय अर्थ लिखिए।

(iv) Write the Liouville's extension of Dirichlet's integral.

डिरिचलेट समाकल का लिवेली व्यापकीकरण लिखिए।

(v) Evaluate :

$$\int_{-1}^{2}\int_{-3}^{3}(y^2-3xy)\,dx\,dy$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_{-1}^{2}\int_{-3}^{3}(y^2-3xy)\,dx\,dy$$

(vi) State the Green's Theorem.

ग्रीन प्रमेय का कथन लिखिए।

(vii) Write the vector equation of the normal.

अभिलम्ब का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

(viii) State the fundamental theorem of calculus.

कलन के मूलभूत प्रमेय का कथन लिखिए।

PART-B/ खण्ड-ब

Unit-I/ इकाई-I

2. State and prove the inverse function theorem.

प्रतिलोम फलन प्रमेय का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

OR / अथवा

Find the maxima and minima of the function $f(x,y)=\sin x+\sin y+\cos(x+y)$.

फलन $f(x,y)=\sin x+\sin y+\cos(x+y)$ का उच्चिष्ठ व निम्निष्ठ ज्ञात कीजिए।

Unit-II/ इकाई-II

3. Prove that :

$$\nabla\times(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a}-\vec{b}(\nabla\cdot\vec{a})-(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b}+\vec{a}(\nabla\cdot\vec{b})$$

सिद्ध कीजिए :

$$\nabla\times(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a}-\vec{b}(\nabla\cdot\vec{a})-(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b}+\vec{a}(\nabla\cdot\vec{b})$$

OR / अथवा

Find the area lying inside cardoid $r=1+\cos\theta$ and outside the parabola $r(1+\cos\theta)=1$.

कार्डियॉइड $r=1+\cos\theta$ के अन्दर तथा परवलय $r(1+\cos\theta)=1$ के बाहर स्थित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Unit-III/ इकाई-III

4. Show that $\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}} = \frac{\pi^2}{8}$

integral being taken over the all positive values of the variables for which the expression is real.

प्रदर्शित कीजिए : $\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}} = \frac{\pi^2}{8}$

जहाँ समाकलन क्षेत्र समाकलन चर के उन सभी मानों तक विस्तृत है जिनके लिये व्यंजक वास्तविक हैं।

OR / अथवा

If C is the simple closed curve in the xy-plane not enclosing the origin; show that

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ where $\vec{F} = \frac{-y\hat{i} + x\hat{j}}{x^2 + y^2}$.

यदि C एक बंद वक्र, xy-समतल में हो तथा मूल बिन्दु C के बाहर हो, तो दर्शाइये कि :

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, जहाँ $\vec{F} = \frac{-y\hat{i} + x\hat{j}}{x^2 + y^2}$.

Unit-IV/ इकाई-IV

5. Evaluate $\int_S \overline{F} \cdot \hat{n}\, dS$; where $\overline{F} = x\hat{i} - y\hat{j} + (z^2 - 1)\hat{k}$ and S is the surface of the cylinder bounded by $z = 0,\ z = 1,\ x^2 + y^2 = 4$.

मान ज्ञात कीजिए : $\int_S \overline{F} \cdot \hat{n}\, dS$

जहाँ $\overline{F} = x\hat{i} - y\hat{j} + (z^2 - 1)\hat{k}$ तथा S उस बेलन का पृष्ठ है जो $z = 0,\ z = 1,\ x^2 + y^2 = 4$ से परिबद्ध है।

OR / अथवा

If $\overline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ and $\overline{a}, \overline{b}$ are constant vectors, then prove that :

$$\vec{a} \cdot \nabla(\vec{b} \cdot \nabla \frac{1}{\vec{r}}) = \frac{3(\vec{a} \cdot \vec{r})(\vec{b} \cdot \vec{r})}{\vec{r}^5} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{r}^3}$$

यदि $\overline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ तथा $\overline{a}, \overline{b}$ अचर सदिश हों, तो सिद्ध कीजिए :

$$\vec{a} \cdot \nabla(\vec{b} \cdot \nabla \frac{1}{\vec{r}}) = \frac{3(\vec{a} \cdot \vec{r})(\vec{b} \cdot \vec{r})}{\vec{r}^5} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{r}^3} \quad .$$

Unit-V/ इकाई-V

6. If $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ and $\vec{f} = (\vec{a} \times \vec{r})r^n$; where $\vec{a}$ is a constant vector; then prove that:

$$curl\,\vec{f} = (n+2)r^n\vec{a} - nr^{n-2}(\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{r}$$

यदि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ तथा $\vec{f} = (\vec{a} \times \vec{r})r^n$; जहाँ $\vec{a}$ अचर सदिश है, तो सिद्ध कीजिए :

$$curl\,\vec{f} = (n+2)r^n\vec{a} - nr^{n-2}(\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{r}$$

OR / अथवा

Show that the directional derivative of a scalar field f at a given point $P(x, y, z)$ in the direction of a unit vector $\hat{a}$ is given by :

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \nabla f \cdot \hat{a} = (grad\ f) \cdot \hat{a}$$

प्रदर्शित कीजिए कि एक अदिश क्षेत्र f का बिन्दु $P(x, y, z)$ पर इकाई सदिश $\hat{a}$ की दिशा में दिक् अवकलज है :

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \nabla f \cdot \hat{a} = (grad\ f) \cdot \hat{a}$$

PART-C/ भाग-स

7. Prove that the volume of the greatest rectangular parallelopiped, that can be inscribed in the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ is $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

सिद्ध कीजिए कि महत्तम आयतीय समानान्तर चतुर्भुज का आयतन जो कि दीर्घवृतज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ में समाहित है, $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$ होता है।

8. If $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ and $\vec{a}$ is any constant vector, then prove that :

$$curl\left(\frac{\vec{a}\times\vec{r}}{\vec{r}^3}\right)=-\frac{\vec{a}}{r^3}+\frac{3(\vec{a}\cdot\vec{r})}{r^5}\vec{r}.$$

यदि $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ तथा $\vec{a}$ कोई अचर सदिश है तो सिद्ध कीजिए :

$$curl\left(\frac{\vec{a}\times\vec{r}}{\vec{r}^3}\right)=-\frac{\vec{a}}{r^3}+\frac{3(\vec{a}\cdot\vec{r})}{r^5}\vec{r}.$$

9. Verify Stoke's theorem when $\vec{F}=(2x-y)\hat{i}-yz^2\hat{j}-y^2z\hat{k}$ and surface S is the upper half surface of the sphere $x^2+y^2+z^2=1$ and 'C' is its boundary.

यदि $\vec{F}=(2x-y)\hat{i}-yz^2\hat{j}-y^2z\hat{k}$ तो स्टोक्स प्रमेय का सत्यापन कीजिए, जहाँ S गोले $x^2+y^2+z^2=1$ का ऊपरी अर्ध पृष्ठ है तथा 'C' उसकी परिसीमा है।

10. Evaluate :

$$\int_0^a \int_0^x \frac{\cos y}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}\, dx\, dy .$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^a \int_0^x \frac{\cos y}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}\, dx\, dy$$

----- × -----