Roll No. : .................. Total Pages : 8

# MAT8073T

## M.Sc. FIRST SEMESTER (NEP) EXAMINATION, 2023-24

## MATHEMATICS

## Differential Equations

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 80

***SECTION-A/ खण्ड-अ*** *[Marks :8]*

*Answer all **eight** questions (Maximum **50** words each).*
***All** questions carry **equal** marks.*

*सभी आठ प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **50** शब्दों से अधिक न हो।*
*सभी प्रश्नों के अंक **समान** हैं।*

***SECTION-B/ खण्ड-ब*** *[Marks :40]*

*Answer **any five** questions (Maximum **250** words each),*
*selecting one from each unit. **All** questions carry **equal** marks.*

*प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*
*प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **250** शब्दों से अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक **समान** हैं।*

***SECTION-C/ खण्ड-स*** *[Marks :32]*

*Answer **any two** questions (Maximum **300** words each).*
***All** questions carry **equal** marks.*

*किन्हीं **दो** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **300** शब्दों से अधिक न हो।*
*सभी प्रश्नों के अंक **समान** हैं।*

## SECTION-A/ खण्ड-अ

1. Very short question answer :
   अति लघु प्रश्न उत्तर :

   (i) State existence and uniqueness theorem.
   अस्तित्व एवं विशिष्टता प्रमेय को बताइये।

   (ii) Define Semi-linear Partial Differential Equation and Quasi-linear Partial Differential Equation.
   अर्द्ध-रैखिक आंशिक अवकल समीकरण तथा अरैखिक आंशिक अवकल समीकरण को परिभाषित कीजिए।

   (iii) Write second and third alternative form of Euler's equation.
   यूलर के समीकरण के द्वितीय तथा तृतीय वैकल्पिक प्रारूप को लिखिए।

   (iv) Find the extremal of the functional $\int_1^3 (3x-y)\cdot dy\,dx$ that satisfy the boundary conditions :
   $y(1)=1;\ y(3)=9/2$
   फलनक $\int_1^3 (3x-y)\cdot dy\,dx$ का उच्चिष्ठ ज्ञात कीजिए जो सीमा शर्तों को संतुष्ट करता है :
   $y(1)=1;\ y(3)=9/2$

   (v) Write the fundamental lemma of the calculus of variations.
   विचरण कलन की मौलिक प्रमेयिका लिखिए।

   (vi) Determine whether $x = 0$ is an ordinary point or a regular singular point of the differential equation :
   $$2x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+7x(x+1)\left(\frac{dy}{dx}\right)-3y=0$$
   अवकल समीकरण $2x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+7x(x+1)\left(\frac{dy}{dx}\right)-3y=0$ का निर्धारण कीजिए जबकि $x=0$ इसका एक साधारण बिन्दु है या एक नियमित एकल बिन्दु है।

(vii) Find the 3rd derivative of ${}_2F_1(2, 3; 1; x)$ with respect to '$x$'.

'$x$' के सन्दर्भ में ${}_2F_1(2, 3; 1; x)$ का तीसरा व्युत्पन्न को ज्ञात कीजिए।

(viii) Express $2-3x+4x^2$ in terms of Legendre polynomial.

लेजेन्ड्रे बहुपद के पदों में $2-3x+4x^2$ को व्यक्त कीजिए।

## SECTION-B/ खण्ड-ब

Short question answer :

लघु प्रश्न उत्तर :

### Unit-I / इकाई-I

2. Write down the canonical form of one dimensional equation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

एक-आयामीय समीकरण $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ के विहित प्रारूप को लिखिए।

**OR / अथवा**

3. For the initial value problem $\frac{dy}{dx} = y^2 + \cos^2 x;\ y(0) = 0$ determine the interval of existence of its solution given that $R$ is the rectangle containing origin :

$R : \{(x, y);\ 0 \le x \le a, |y| \le b,\ a > \frac{1}{2},\ b > 0\}$

प्रारम्भिक मान समस्या $\frac{dy}{dx} = y^2 + \cos^2 x;\ y(0) = 0$ के लिए इसके समाधान के अस्तित्व का अन्तराल निर्धारित कीजिये, यह देखते हुए कि $R$ मूल बिन्दु $R : \{(x, y);\ 0 \le x \le a, |y| \le b,$ $a > \frac{1}{2},\ b > 0\}$ वाला आयत है।

### Unit-II / इकाई-II

4. Find the curve passing through the points $(x_1, y_1)$ and $(x_2, y_2)$ which when rotated about the $x$-axis gives a minimum surface area.

बिन्दु $(x_1, y_1)$ तथा $(x_2, y_2)$ से गुजरने वाला वक्र ज्ञात कीजिए जो $x$-अक्ष के चारों ओर घूमने पर न्यूनतम सतह क्षेत्र देता है।

**OR / अथवा**

5. Show that the shortest distance between two fixed points in the euclidean $xy$-plane is a straight line.

प्रदर्शित कीजिए कि यूक्लिडियन $xy$-तल में दो निश्चित बिन्दुओं के मध्य की न्यूनतम दूरी एक सीधी रेखा है।

**Unit-III / इकाई-III**

6. Prove that :

$$F(\alpha,\beta;\gamma; x) = \frac{\lceil\gamma}{\lceil\beta\lceil\gamma-\beta}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\cdot(1-xt)^{-\alpha}\cdot dt$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$F(\alpha,\beta;\gamma; x) = \frac{\lceil\gamma}{\lceil\beta\lceil\gamma-\beta}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\cdot(1-xt)^{-\alpha}\cdot dt$$

**OR / अथवा**

7. To show $P_n(x)$ is coefficient of $z^n$ in the expension of $(1-2xz+z^2)^{-1/2}$ in ascending powers of $z$.

दर्शाइये कि $P_n(x)$, $z$ की आरोही घात में $(1-2xz+z^2)^{-1/2}$ के विस्तार में $z^n$ का गुणांक है।

**Unit-IV / इकाई-IV**

8. To show that :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \lfloor n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

प्रदर्शित कीजिए कि :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \lfloor n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

**OR / अथवा**

9. To show that :

$$F(\alpha;\beta;x) = e^x F(\beta-\alpha;\ \beta;\ -x)$$

प्रदर्शित कीजिए कि :

$$F(\alpha;\beta;x) = e^x F(\beta-\alpha;\ \beta;\ -x)$$

**Unit-V / इकाई-V**

10. From among the curve connecting the points $P_1(1, 3)$ and $P_2(2, 5)$ find the curves on which an extremum of the functional $\int_1^2 y'(1+x^2y')\,dx$ can be attained.

बिन्दुओं $P_1(1, 3)$ तथा $P_2(2, 5)$ को जोड़ने वाले वक्रों में से उन वक्रों को ज्ञात कीजिए जिन पर फलनक $\int_1^2 y'(1+x^2y')\,dx$ का चरम प्राप्त किया जा सकता है।

**OR / अथवा**

11. Solve Boundary value problem :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4\frac{\partial u}{\partial y} \text{ if } u(0,\ y) = 8e^{-3y}.$$

सीमा मान समस्या को हल कीजिए :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4\frac{\partial u}{\partial y} \text{ यदि } u(0,\ y) = 8e^{-3y}.$$

**SECTION-C/ खण्ड-स**

12. Use the method of separation of variables to solve the equation :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t}$$

given that $v = 0$ when $t \to \infty$ as well as $v = 0$ at $x = 0$ and $x = 1$.

निम्न समीकरण को हल करने के लिए चरों को पृथक करने की विधि का उपयोग कीजिए :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t}$$

दिया गया है कि $v = 0$ जब $t \to \infty$ साथ ही $x = 0$ तथा $x = 1$ पर $v = 0$.

13. (The problem of the Brachistochrone) Find the curve connecting given points $A$ and $B$ which is traversed by a particle sliding from $A$ to $B$ in the shortest time (friction and resistance of the medium are ignored).

दिये गये बिन्दु $A$ और $B$ को जोड़ने वाला वक्र ज्ञात कीजिए, जो सबसे कम समय में $A$ से $B$ तक फिसलने वाले कण द्वारा पार किया जाता है (माध्यम के घर्षण और प्रतिरोध को नजरअंदाज कर दिया जाता है) । (ब्रेचिस्टोक्रोन की समस्या)

14. Find the series solution of :

$$4xy'' + 2y' + y = 0$$

निम्न श्रेणी का हल ज्ञात कीजिए :

$$4xy'' + 2y' + y = 0$$

15. (a) $nP_n = (2n-1)xP_{n-1} - (n-1)P_{n-2};\ n \geq 2$

(b) Find the extrmals and the stationary function of the functions :

$$\int_0^e (xy'^2 + yy')\,dx;,\ y(1) = 0,\ y(e) = 1$$

फलनक के उच्चिष्ठ तथा स्थैतिक फलन ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^e (xy'^2 + yy')\,dx;,\ y(1) = 0,\ y(e) = 1$$

----- × -----