Roll No. : .... Total Pages : 8

MAT8072T

M.Sc. FIRST SEMESTER (NEP) EXAMINATION, 2023-24

MATHEMATICS

Paper : Second

Real Analysis

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 80

SECTION-A/ खण्ड-अ *[Marks : 16]*

Answer all ***eight*** *questions (Maximum* ***50*** *words each).*
All *questions carry* ***equal*** *marks.*

सभी आठ प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर अधिकतम ***50*** *शब्दों में दीजिए।*
सभी *प्रश्नों के अंक* ***समान*** *हैं।*

SECTION-B/ खण्ड-ब *[Marks : 40]*

Answer ***any five*** *questions (Maximum* ***200*** *words each), selecting one from each unit.* ***All*** *questions carry* ***equal*** *marks.*

प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न चुनते हुए, ***किन्हीं पाँच*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*
प्रत्येक प्रश्न का उत्तर अधिकतम ***200*** *शब्दों में दीजिए।* ***सभी*** *प्रश्नों के अंक* ***समान*** *हैं।*

SECTION-C/ खण्ड-स *[Marks : 24]*

Answer ***any two*** *questions (Maximum* ***300*** *words each).*
All *questions carry* ***equal*** *marks.*

किन्हीं दो *प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर अधिकतम* ***300*** *शब्दों में दीजिए।*
सभी *प्रश्नों के अंक* ***समान*** *हैं।*

SECTION-A/ खण्ड-अ

1. Very short question answer :

अति लघु प्रश्न उत्तर :

(i) Define Uniform Continuity.

समरूप सांतत्यता को परिभाषित कीजिए।

(ii) Write definition of Cauchy and Heine for continuity.

सांतत्यता के लिए कॉशी तथा हेन की परिभाषा दीजिए।

(iii) Define pointwise and uniform convergence of a sequence.

किसी अनुक्रम के बिन्दुवार और समरूप अभिसरण को परिभाषित कीजिए।

(iv) Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ converges uniformly on $\mathbb{R}$.

दर्शाइये कि शृंखला $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ एकसमान रूप से $\mathbb{R}$ पर अभिसरित होती है।

(v) Write Fourier series for even and odd functions.

सम तथा विषम फलनों के लिए फूरियर श्रेणी को लिखिए।

(vi) Test the convergence of $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot dx$.

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot dx$ के अभिसरण की जाँच कीजिए।

(vii) Define a countable set with an example.

गणनीय समुच्चय को एक उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए।

(viii) Prove that the set of real number R is equivalent to the set of positive real number R^+.

सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्या R का समुच्चय धनात्मक वास्तविक संख्या R^+ के समुच्चय के समान है।

SECTION-B/ खण्ड-ब

Short question answer :

लघु प्रश्न उत्तर :

Unit-I / इकाई-I

2. Let for a function : $f(x+y) = f(x) + f(y)$; $\forall x, y \in R$, then show that if the function is continuous at $x = a$, then it continuous for all values of $x \in R$.

माना एक फलन के लिए : $f(x+y) = f(x) + f(y)$; $\forall x, y \in R$ तब दर्शाइये कि यदि फलन $x = a$ पर सतत है, तो यह $x \in R$ के सभी मानों के लिए सतत होता है।

OR / अथवा

3. Discuss the nature of discontinuity of the following function at $x = 1$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(2+x) - x^{2n} \sin x}{1 + x^{2n}}$$

Show that $f(0)$ and $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ differ in sign.

$x = 1$ पर निम्नलिखित फलन के असांतत्यता की प्रकृति का वर्णन कीजिए :

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\log(2+x)-x^{2n}\sin x}{1+x^{2n}}$$

दर्शाइये कि $f(0)$ तथा $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ चिह्न में भिन्न होता है।

Unit-II / इकाई-II

4. Test for uniform convergence of the sequence $\{f_n(x)\}$ where $f_n(x)=nx(1-x)^n$, when $0\le x\le 1$.

अनुक्रम $\{f_n(x)\}$ के एकसमान अभिसरण हेतु परीक्षण कीजिए, जहाँ $f_n(x)=nx(1-x)^n$, जब $0\le x\le 1$.

OR / अथवा

5. If function $f(x)$ is defined as follows then find out Fourier series :

$$f(x)=\begin{cases}-K, & \text{when } -\pi<x<0\\ K, & \text{when } 0<x<\pi\end{cases}$$

Hence prove that $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}.......$

यदि फलन $f(x)$ निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है, तब फूरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए :

$$f(x)=\begin{cases}-K, & \text{जब } -\pi<x<0\\ K, & \text{जब } 0<x<\pi\end{cases}$$

अतः सिद्ध कीजिए कि $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}.......$

Unit-III / इकाई-III

6. Examine the convergence of the following integral :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 + x^2}{x^6 + 1} \cdot dx$$

निम्नलिखित समाकल के अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 + x^2}{x^6 + 1} \cdot dx$$

OR / अथवा

7. If A and B are countable set, then $A \times B$ is also countable. Prove it.

यदि A और B गणनीय समुच्चय हो, तो $A \times B$ भी गणनीय होता है। सिद्ध कीजिए।

Unit-IV / इकाई-IV

8. If a function f is a continuous in $[a,b]$ and $f(a) \neq f(b)$, then f assumes every value between $f(a)$ and $f(b)$ at least once in $[a, b]$.

यदि कोई फलन f, $[a,b]$ में एक सतत है, और $f(a) \neq f(b)$, है तो $f(a)$ और $f(b)$ के बीच प्रत्येक मान को $[a,b]$ में कम-से-कम एक बार ग्रहण करता है।

OR / अथवा

9. Prove that integral $\int_0^1 \log\lceil x \cdot dx$ is convergent.

सिद्ध कीजिए कि समाकल $\int_0^1 \log\lceil x \cdot dx$ अभिसरित है।

Unit-V / इकाई-V

10. Prove that the function $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right);\ \forall x > 0$ defined on R^+ continuous on but not uniform continuous.

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right);\ \forall x > 0,$ R^+ पर परिभाषित है, सतत है किन्तु एकसमान सतत नहीं है।

OR / अथवा

11. Test uniform convergence of the following series :

$$\sum \frac{nx}{1+n^2x^2};\ 0 \le x \le 1$$

निम्न श्रेणी के एकसमान अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$\sum \frac{nx}{1+n^2x^2};\ 0 \le x \le 1$$

SECTION-C/ खण्ड-स

12. (a) Show that between any two roots of $e^x \cos x = 1$, there exists at least one root of $e^x \sin x - 1 = 0$.

दर्शाइये कि $e^x \cos x = 1$ के दो मूलों के मध्य $e^x \sin x - 1 = 0$ का कम से कम एक मूल उपस्थित होता है।

(b) Using mean value theorem, show that :

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x,\ x > 0$$

मध्यमान प्रमेय का प्रयोग करते हुए, दर्शाइये कि :

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x,\ x > 0$$

13. (a) Prove that the series whose sum of n terms $S_n(x) = \frac{1}{1+nx}$, for $0 \le x \le 1$ can be integrated terms by term whereas it is not uniformly convergent in every interval.

सिद्ध कीजिए कि वह श्रृंखला जिसके n पदों का योग $S_n(x) = \frac{1}{1+nx}$, $0 \le x \le 1$ के लिए पदों को एकीकृत किया जा सकता है जबकि यह प्रत्येक अन्तराल में समान रूप से अभिसरित नहीं है।

(b) Find the Fourier series for function $f(x)$ in the interval $(-\pi, \pi)$.

अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में फलन $f(x)$ के लिए फूरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

14. (a) Examine the convergence of the integral :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

समाकल के अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

(b) Prove that the set of rational numbers is a denumerable set.

सिद्ध कीजिए कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय एक संख्येय समुच्चय है।

15. (a) The function f defined by

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + a, & x \le 1 \\ bx + 2, & x > 1 \end{cases}$$

is given to be derivable for every x. Find a and b.

फलन f निम्न द्वारा परिभाषित

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x+a, & x\le 1 \\ bx+2, & x>1 \end{cases}$$

को प्रत्येक x के लिए व्युत्पन्न माना जाता है। a तथा b को ज्ञात कीजिए।

(b) Test the convergence of following integrals :

निम्न समाकल के अभिसरण की जाँच कीजिए :

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3+x^2}{x^6+1}\cdot dx$

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\cdot dx$

----- × -----