Roll No. : ..... Total Pages : 4

MAT8071T

M.Sc. FIRST SEMESTER (NEP) EXAMINATION, 2023-24

MATHEMATICS

Advanced Abstract Algebra

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 80

PART-A/ भाग-अ *[Marks :16]*

*Answer all **eight** questions (Maximum **50** words each).*
*All questions carry **equal** marks.*

***सभी आठ** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **50** शब्दों से अधिक न हो।*
***सभी** प्रश्नों के अंक **समान** हैं।*

PART-B/ भाग-ब *[Marks :40]*

*Answer **five** questions (Maximum **200** words each)*
*selecting one from each unit. **All** questions carry **equal** marks.*

*प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*
*प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **200** शब्दों से अधिक न हो। **सभी** प्रश्नों के अंक **समान** हैं।*

PART-C/ भाग-स *[Marks :24]*

*Answer **any two** questions (Maximum **300** words each).*
*All questions carry **equal** marks.*

***किन्हीं दो** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **300** शब्दों से अधिक न हो।*
***सभी** प्रश्नों के अंक **समान** हैं।*

PART-A/ भाग–अ

1. (i) Define External Direct Product.

बाह्य प्रत्यक्ष उत्पाद को परिभाषित कीजिए।

(ii) Write the statement of Jordan-Holder Theorem.

जॉर्डन-होल्डर प्रमेय का कथन लिखिए।

(iii) Define Solvable Groups.

सोल्वेबल समूहों को परिभाषित कीजिए।

(iv) Define Annihilators of vector sub-spaces.

सदिश उप-समष्टि के विनाशक को परिभाषित कीजिए।

(v) Define Polynomial Rings.

बहुपद वलय को परिभाषित कीजिए।

(vi) Find the degree of $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ over Q.

Q पर $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ की कोटि ज्ञात कीजिए।

(vii) Define Galois Group.

गैलोइस समूह को परिभाषित कीजिए।

(viii) Define Invariant.

इन्वेरीअन्ट को परिभाषित कीजिए।

PART-B/ भाग–ब

Unit-I / इकाई–I

2. Let G be a group and H be a subgroup of G, then $H\Delta G$ iff $\left[H,G\right]\subseteq H$.

माना G एक समूह है तथा H,G का उप-समूह है, तब $H\Delta G$ यदिदि $\left[H,G\right]\subseteq H$.

3. State and proof Zassenhaus Lemma.

जैसेनहोस प्रमेयिका को कथन सहित सिद्ध कीजिए।

Unit-II / इकाई–II

4. If G is a solvable group, then prove that every subgroup of G is also solvable.

   यदि G एक सोल्वेबल समूह है, तब सिद्ध कीजिए कि G का प्रत्येक उपसमूह भी सोल्वेबल समूह होता है।

5. Let V and V' be finite dimensional vector spaces over a field F and $t : V \to V'$ be a linear transformation then prove that :

   $$\ker t^* = A\left(t\left(V\right)\right)$$

   माना V तथा V' एक क्षेत्र F पर परिमित वीमिय सदिश समष्टियाँ हैं और $t : V \to V'$ एक रैखिक रूपान्तरण है, तब सिद्ध कीजिए कि :

   $$\ker t^* = A\left(t\left(V\right)\right)$$

Unit-III / इकाई–III

6. Show that the ring $\left(z, +, \cdot\right)$ of integers is a principal ideal domain.

   सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकों का वलय $\left(z, +, \cdot\right)$ प्रमुख आदर्श डोमेन होता है।

7. Let $\frac{K}{F}$ be a field extension and let $a \in K$ be algebraic over F. Then show that any two minimal monic polynomials for a over F are equal.

   माना $\frac{K}{F}$ एक F फील्ड एक्सटेंशन है तथा माना $a \in K$ एक F पर बीजीय है, तब प्रदर्शित कीजिए कि कोई दो मिनिमल मोनिक बहुपद F पर समान होते हैं।

Unit-IV / इकाई–IV

8. Let G_1 and G_2 be groups, then show that :

   $$G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$$

   माना G_1 तथा G_2 दो समूह हैं, तब प्रदर्शित कीजिए कि :

   $$G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$$

9. State and proof Sylow's three theorem.

सिलो की तीसरी प्रमेय को कथन सहित सिद्ध कीजिए।

Unit-V / इकाई–V

10. A group G is solvable iff $G^{(n)} = \{e\}$, for some $n \in N$.

एक समूह G सोल्वेबल है यदि और केवल यदि $G^{(n)} = \{e\}$, कुछ $n \in N$ के लिए .

11. Let V be a finite dimensional vector space over a field F and W be a sub-space of V, then :

$$\dim A(W) = \dim V - \dim W$$

माना V, क्षेत्र F पर एक परिमित वीमिय सदिश समष्टि है तथा W, V की एक सदिश उप-समष्टि है, तब :

$$\dim A(W) = \dim V - \dim W$$

PART-C/ भाग–स

12. State and proof Jordan-Holder theorem.

जॉर्डन होल्डर प्रमेय को कथन सहित सिद्ध कीजिए।

13. Define Projection, Singular and Non-singular Linear transformation, Nilpotent groups.

प्रोजेक्शन, सिंगुलर तथा नॉन-सिंगुलर लाइनर ट्रांसफॉर्मेशन, निल्पोटेन्ट समूहों को परिभाषित कीजिए।

14. State and proof Unique Factorization theorem.

यूनिक फेक्टोराइजेशन प्रमेय को कथन सहित सिद्ध कीजिए।

15. Let $P(x)$ be a polynomial of positive degree over a field F, then show that :

$$[K : F] \leq \deg P(x)$$

माना $P(x)$, एक क्षेत्र F पर एक धनात्मक कोटि का बहुपद है, तब प्रदर्शित कीजिए कि :

$$[K : F] \leq \deg P(x)$$

----- × -----