

**1227**

**B. SC. First Year EXAMINATION, 2019**

**MATHEMATICS**

**Paper – III**

**Geometry**

Time: Three Hours

Maximum Marks: 75

**PART – A (खण्ड – अ)**

[Marks: 20]

*Answer all questions (50 words each).*

*All questions carry equal marks.*

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 50 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

**PART – B (खण्ड – ब)**

[Marks: 35]

*Answer five questions (250 words each).*

*Selecting one from each unit. All questions carry equal marks.*

प्रत्येक इकाई से एक-एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए।

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

**PART – C (खण्ड – स)**

[Marks: 20]

*Answer any two questions (500 words each).*

*All questions carry equal marks.*

कोई दो प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 500 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

## PART – A / खण्ड – अ

- Q.1 (i) Write the condition for a plane  $lx + my + nz = p$  to touch the sphere  $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$   
समतल  $lx + my + nz = p$  के गोले  $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$  का स्पर्श समतल होने का प्रतिबंध लिखिए।
- (ii) Define reciprocal cone.  
व्युत्क्रम शंकु को परिभाषित कीजिए।
- (iii) Write the find out of formulae of eccentricity of hyperbola.  
अतिपरवलय की उत्केन्द्रता ज्ञात करने का सूत्र लिखिए।
- (iv) Write the polar equation of a conic, referred to focus as the pole.  
शांकव का ध्रुवीय समीकरण लिखिए, जब नाभि ध्रुव हो।
- (v) Define skew lines.  
विषमतलीय रेखाएँ किसे कहते हैं?
- (vi) Write the formula find out shortest distance between two lines.  
दो रेखाओं के बीच लघुतम दूरी ज्ञात करने का सूत्र लिखिए।
- (vii) Write the formulae tangent and normal line on the ellipse at the point.  
दीर्घवृत्त पर स्थित किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा एवं अभिलम्ब का सूत्र लिखिए।
- (viii) Write the co-ordinates of the centre of the conic  $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ .  
शांकव  $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  के केन्द्र के निर्देशांक लिखिए।
- (ix) Define principal plane and principal directions.  
प्रमुख समतल एवं प्रमुख दिशाओं को परिभाषित कीजिए।
- (x) Write the condition of perpendicular of two lines, but not equal.  
दो रेखाओं के समान्तर किन्तु समान नहीं होने की शर्त लिखिए।

## PART – B / खण्ड – ब

### UNIT – I / इकाई – I

- Q.2 Prove that the lengths of semi axes of the conic  $ax^2 + 2hxy + ay^2 = d$  are  $\sqrt{\frac{d}{(a+h)}}$  and  $\sqrt{\frac{d}{(a-h)}}$  respectively and their combined equation is  $x^2 - y^2 = 0$ .

सिद्ध कीजिए कि शांकव  $ax^2 + 2hxy + ay^2 = d$  की अर्ध अक्षों की लम्बाइयाँ क्रमशः  $\sqrt{\frac{d}{(a+h)}}$  तथा  $\sqrt{\frac{d}{(a-h)}}$  हैं तथा उनका संयुक्त समीकरण  $x^2 - y^2 = 0$

- Q.3 Prove that the line  $lx + my + n = 0$  is a normal to the ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  if-

सिद्ध कीजिए कि सरल रेखा  $lx + my + n = 0$  दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  पर अभिलम्ब होगी यदि-

$$\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{n^2}$$

### UNIT -II/ इकाई - II

Q.4 Prove that the locus of the point of intersection of two perpendicular tangents drawn to the conic is called the director circle of the conic.

सिद्ध कीजिए की शांकव पर खींची गई दो लम्बवत् स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ शांकव का नियामक वृत्त कहलाता है।

Q.5 Show that the locus of the poles of the normal chords of the hyperbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  is-

सिद्ध कीजिए कि अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  की अभिलम्ब जीवाओं के ध्रुवों का बिन्दुपथ है—  
$$y^2a^6 - x^2b^6 = (a^2 + b^2)^2 x^2y^2$$

### UNIT -III/ इकाई - III

Q.6 Find out angle between two planes-

$$x + y + 2z = 9 \text{ and } 2x - y + z = 15$$

समतलों  $x + y + 2z = 9$  और  $2x - y + z = 15$  के बीच कोण ज्ञात कीजिए।

Q.7 Find out shortest distance between two lines-

दो रेखाओं  $\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-3}$  तथा  $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{2}$  के मध्य की लघुत्तम दूरी ज्ञात कीजिए।

### UNIT -IV/ इकाई - IV

Q.8 Find the equation of the sphere which passes through the circle  $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ ,  $x + 2y + 3z = 3$  and touches the planes  $4x + 3y = 15$

उन गोलों के समीकरण ज्ञात कीजिए जो वृत्त  $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ ,  $x + 2y + 3z = 3$  से होकर जाते हैं तथा समतल  $4x + 3y = 15$  को स्पर्श करते हैं।

Q.9 Find the equation of a right circular cylinder whose guiding circle passes through the points  $(a, 0, 0)$ ,  $(0, b, 0)$ ,  $(0, 0, c)$ .

उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका निर्देशक वृत्त बिन्दुओं  $(a, 0, 0)$ ,  $(0, b, 0)$  और  $(0, 0, c)$  से गुजरता है।

### UNIT -V/ इकाई - V

Q.10 Planes are drawn through a fixed point  $(\alpha, \beta, \gamma)$  so that their sections of the Paraboloid  $ax^2 + by^2 = 2z$  are rectangular hyperbolas. Prove that they touch the following cone:

एक स्थिर बिन्दु  $(\alpha, \beta, \gamma)$  से खींचे समतलों द्वारा परवलय  $ax^2 + by^2 = 2z$  के परिच्छेद आयतीय अतिपरवलय हैं, तो सिद्ध कीजिए कि वे निम्न शंकु को स्पर्श करते हैं :

$$\frac{(x-\alpha)^2}{b} + \frac{(y-\beta)^2}{a} + \frac{(z-\gamma)^2}{a+b} = 0$$

Q.11 Prove that the feet of the six normals from  $(\alpha, \beta, \gamma)$  to the ellipsoid  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  lie on the curve of intersection of the ellipsoid and the cone  $\sum \frac{a^2(b^2-c^2)}{x} \cdot \alpha = 0$

सिद्ध कीजिए कि  $(\alpha, \beta, \gamma)$  से दीर्घवृत्तज  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  पर खींचे छः अभिलम्बों के पाद दीर्घवृत्तज तथा शंकु  $\sum \frac{a^2(b^2-c^2)}{x} \cdot \alpha = 0$  के प्रतिच्छेद वक्र पर स्थित है।

## PART - C / खण्ड- स

Q.12 If the lines  $lx + my + n = 0$  and  $l'x + m'y + n' = 0$  be conjugate for the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ then prove that:}$$

यदि रेखायें  $lx + my + n = 0$  तथा  $l'x + m'y + n' = 0$  दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  के सापेक्ष संयुग्मी रेखायें हो, तो सिद्ध कीजिए।

$$a^2ll' + b^2mm' = nn'$$

Q.13 Prove that the line  $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$  will be normal to the hyperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ if-}$$

सिद्ध कीजिए कि सरल रेखा  $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$  अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  के अभिलम्ब होगी यदि-

$$a^2 \sec^2\alpha - b^2 \operatorname{cosec}^2\alpha = \frac{(a^2 + b^2)^2}{p^2}$$

Q.14 Find out the shortest distance between lines, which vector equation is as follows:

रेखाएँ, जिनके सदिश समीकरण निम्नलिखित हैं, के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए-

$$\vec{r} = (1 - t)\hat{i} + (t - 2)\hat{j} + (3 - 2t)\hat{k} \text{ और}$$

$$\vec{r} = (s + 1)\hat{i} + (2s - 1)\hat{j} - (2s + 1)\hat{k}$$

Q.15 The plane  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  meets the co-ordinate axes in A,B,C respectively. Prove that

the equation to the cone generated by the lines drawn from O to meet the circle ABC is-  
समतल  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  अक्षों को बिन्दु A,B,C पर काटता है। सिद्ध कीजिए कि O से गुजरने वाली तथा वृत्त को प्रतिच्छेद करने वाली रेखाओं द्वारा जनित शंकु का समीकरण है-

$$yz \left( \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + zx \left( \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) + xy \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) = 0$$

Q.16 A tangent plane to the ellipsoid  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  meets the co-ordinates axes in points

A, B and C respectively. Prove that the locus of the centroid of the triangle ABC is-

दीर्घवृत्तज  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  का कोई स्पर्श तल अक्षों को क्रमशः A,B,C बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज ABC के केन्द्रक का बिन्दुपथ है-

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 9$$