Roll No. .... Total Pages: 07

7225

M.Sc. IInd SEMESTER EXAMINATION, 2019

MATHEMATICS

Paper – Vth

Differential Geometry - II

Time: Three Hours

Maximum Marks: 80

PART – A (खण्ड – अ) *[Marks: 20]*

*Answer all questions (**50** words each).*

All questions carry equal marks.

*सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **50** शब्दों से अधिक न हो।*

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART – B (खण्ड – ब) *[Marks: 40]*

*Answer **five** questions (**250** words each),*

selecting one from each unit. All questions carry equal marks.

*प्रत्येक इकाई से **एक–एक** प्रश्न चुनते हुए, कुल **पाँच** प्रश्न कीजिए।*

*प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **250** शब्दों से अधिक न हो।*

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART – C (खण्ड – स) *[Marks: 20]*

*Answer any **two** questions (**300** words each).*

All questions carry equal marks.

*कोई **दो प्रश्न** कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **300** शब्दों से अधिक न हो।*

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART – A / खण्ड – अ

Q.1 Solve all questions -

सभी प्रश्न कीजिए –

(i) Define curvature and torsion.

वक्रता एवं मरोड़ को परिभाषित कीजिए।

(ii) Write Frenet–Serret formulas.

फ्रेनेट–सीरेट फॉर्मूले लिखिए।

(iii) Define Osculating circle.

ऑस्कुलेटिंग सर्कल को परिभाषित कीजिए।

(iv) Define envelope of a system of surface.

सतह की प्रणाली के एन्वलॉप को परिभाषित कीजिए।

(v) Show that the line given by-

$x = 3t^2z + 2t(1 - 3t^4)$, $y = -2tz + t^2(3 + 4t^2)$

generates a skew surface.

प्रदर्शित कीजिए कि दी गई रेखा–

$x = 3t^2z + 2t(1 - 3t^4)$, $y = -2tz + t^2(3 + 4t^2)$

सक्यु पृष्ठ को उत्पन्न करती है।

(vi) Define Line of Striction of a skew surface.

तिरछी सतह की लाइन ऑफ स्ट्रिक्शन को परिभाषित कीजिए।

(vii) Define lines of curvature and write differential equation of lines of curvature.

वक्रता रेखाओं को परिभाषित कीजिए और वक्रता रेखाओं के अवकलन समीकरण को लिखिए।

(viii) Write the determinant form of principal curvatures and principal radii of curvature.

उमुख वक्रता और प्रमुख वक्रता त्रिज्या का सिद्ध रूप लिखिए।

(ix) Define lines of curvature on a developable surface.

डेवलेपबल पृष्ठ की वक्रता रेखाओं को परिभाषित कीजिए।

(x) Define curvilinear coordinates.

वक्रता निर्देशांक को परिभाषित कीजिए।

PART – B / खण्ड – ब

UNIT – I / इकाई – I

Q.2 Find the radii of curvature and torsion at a point of the curve-

$x^2 + y^2 = a^2, \; x^2 - y^2 = az$

वक्र $x^2 + y^2 = a^2, \; x^2 - y^2 = az$ के एक बिन्दु पर वक्रता एवं मरोड़ की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

OR / अथवा

Q.3 Find the plane that has three point contact at the origin with the curve-

$x = t^4-1, y = t^3-1, z = t^2-1$

वक्र $x = t^4-1, \; y = t^3-1, \; z = t^2-1$ के साथ मूल बिन्दु पर त्रि–बिन्दु सम्पर्क रखने वाले समतल को ज्ञात कीजिए।

UNIT – II / इकाई – II

Q.4 Find the equation of the osculating sphere at the point (1, 2, 3) on the curve $x = 2t + 1, \; y = 3t^2 + 2, \; z = 4t^3 + 3$.

वक्र $x = 2t + 1, \; y = 3t^2 + 2, \; z = 4t^3 + 3$ के बिन्दु (1, 2, 3) पर ऑस्कुलेटिंग स्फीयर का समीकरण ज्ञात कीजिए।

OR / अथवा

Q.5 Find the envelope of the plane-

$$\frac{x}{a+u} + \frac{y}{b+u} + \frac{z}{c+u} = 1,$$

where u is the parameter.

समतल $\frac{x}{a+u} + \frac{y}{b+u} + \frac{z}{c+u} = 1$ के लिए एन्वलॉप ज्ञात कीजिए, जहाँ u एक प्राचल है।

UNIT – III / इकाई – III

Q.6 Find the curvature of the normal section of the helicoid $x = u\cos\theta$, $y = u\sin\theta$, $z = f(u)+c\theta$.

हेलीकोइड $x = u\cos\theta$, $y = u\sin\theta$, $z = f(u)+c\theta$ के अभिलंब परिच्छेद की वक्रता ज्ञात करो।

OR / अथवा

Q.7 If p, p′ are the radii of curvature of any two perpendicular normal sections at a point of a surface, prove that (p-rho)

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \text{constant}$$

किसी पृष्ठ के एक बिन्दु पर किन्हीं दो लम्बवत् अभिलंब परिच्छेदों की वक्रता त्रिज्याएं यदि p एवं p′ है, तो सिद्ध कीजिए –

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \text{स्थिरांक}$$

UNIT – IV / इकाई – IV

Q.8 Find the principal sections and the principal curvatures of the surface-

$x = a(u + v)$, $y = b(u - v)$, $z = uv$.

पृष्ठ $x = a(u + v)$, $y = b(u - v)$, $z = uv$ के मुख्य परिच्छेद एवं मुख्य वक्रताएं ज्ञात कीजिए।

OR / अथवा

Q.9 Find the values of-

(i) First curvature

(ii) Gaussian curvature at any point of the right helicoid $r = (u\cos v, u\sin v, av)$.

राइट हेलीकॉइड $r = (u\cos v, u\sin v, av)$ के किसी बिन्दु पर–

(i) प्रथम वक्रता

(ii) गाउसियन वक्रता ज्ञात करो।

UNIT – V / इकाई – V

Q.10 Prove that the necessary and sufficient conditions that parametric curves be lines of curvature are-

$F = 0$ and $M = 0$, $EN - GL \neq 0$

सिद्ध कीजिए की प्राचलिक वक्र के वक्रता रेखाएं बनाने के लिए आवश्यक और पर्याप्त शर्तें निम्न है–

$F = 0$ and $M = 0$, $EN - GL \neq 0$

OR / अथवा

Q.11 Prove that the for the helicoid-

$x = u\cos\theta,\ y = u\sin\theta,\ z = c\theta$

(p-rho) $p_1 = -p_2 = \frac{u^2+c^2}{c}$, where $u^2 = x^2 + y^2$ and that the lines of curvature are given by-

$$d\theta = \pm\frac{du}{\sqrt{u^2+c^2}}$$

सिद्ध कीजिए किसी हेलीकॉइड $x = u\cos\theta,\ y = u\sin\theta,\ z = c\theta$ के लिए $p_1 = -p_2 = \frac{u^2+c^2}{c}$, जहाँ $u^2 = x^2 + y^2$ एवं वक्रता रेखाएं निम्न होगी–

$$d\theta = \pm\frac{du}{\sqrt{u^2+c^2}}$$

PART – C / खण्ड – स

Q.12 Prove that the Osculating plane at (x_1, y_1, z_1) on the curve of intersection of the cylinders $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = b^2$ is given by-

$$\frac{xx_1^3 - zz_1^3 - a^4}{a^2} = \frac{yy_1^3 - zz_1^3 - b^4}{b^2}$$

सिद्ध कीजिए कि बेलन $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = b^2$ के प्रतिच्छेदन वक्र पर स्थित बिन्दु (x_1, y_1, z_1) पर ऑसक्युलेटिंग प्लेन $\frac{xx_1^3 - zz_1^3 - a^4}{a^2} = \frac{yy_1^3 - zz_1^3 - b^4}{b^2}$ द्वारा दिया गया है।

Q.13 A tangent plane to the ellipsoid-

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

meets the axes in A, B, C. Show that the envelope of the sphere OABC is-

$$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}+(cz)^{\frac{2}{3}}=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{2}{3}}$$

एक दीर्घवृत्तज् $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ का स्पर्श समतल, अक्ष को A, B, C पर मिलता है। सिद्ध कीजिए कि गोला OABC का एन्वलॉप निम्न होगा–

$$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}+(cz)^{\frac{2}{3}}=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{2}{3}}$$

Q.14 Show that the edge of regression of the developable that passes through the parabolas $x=0,\ z^2=4ay\,;x=a, y^2=4az$ is given by-

$$\frac{3x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{3(a-x)}$$

सिद्ध कीजिए कि परवलय $x=0,\ z^2=4ay\,;\ x=a, y^2=4az$ से गुजरने वाले डेवलॉपेबल की एज ऑफ रिग्रेशन होगी–

$$\frac{3x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{3(a-x)}$$

Q.15 Prove that the cone $Kxy=Z\left\{\sqrt{(x^2+z^2)}+\sqrt{(y^2+z^2)}\right\}$ passes through a line of curvature of the paraboloid xy = az.

सिद्ध कीजिए कि परवलयज् $xy = az$ की वक्रता रेखा से शंकु $Kxy=Z\left\{\sqrt{(x^2+z^2)}+\sqrt{(y^2+z^2)}\right\}$ गुजरता है।

Q.16 Show that the points of intersection of the surface $x^m + y^m + z^m = a^m$ and the line $x = y = z$ are umbilics and that the radius of curvature at an umbilic is given by-

$$p = \frac{a}{m-1}(3)^{\frac{(m-2)}{2m}}$$

सिद्ध कीजिए पृष्ठ $x^m + y^m + z^m = a^m$ और रेखा $x = y = z$ के प्रतिच्छेद बिन्दु यूम्बलिक्स है एवं यूम्बलिक की वक्रता त्रिज्या $p = \frac{a}{m-1}(3)^{\frac{(m-2)}{2m}}$ द्वारा दी जाती है।
