

**6663**

**B. Sc./B. Ed. Part – I (Integrated) Examination, 2019**

**MATHEMATICS – I**

**(Algebra)**

Time: Three Hours

Maximum Marks: 60

**PART – A (खण्ड – अ)**

[Marks: 20]

*All questions are mandatory.*

*The answer to each question should not exceed 50 words.*

*Each question is of 2 marks.*

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 50 शब्दों से अधिक न हो।

प्रत्येक प्रश्न 2 अंक का है।

**PART – B (खण्ड – ब)**

[Marks: 20]

*Attempt four questions selecting one from each unit.*

*The answer to each question should not exceed 250 words.*

*Each question is of 5 marks.*

प्रत्येक इकाई से एक-एक प्रश्न चुनते हुए, कुल चार प्रश्न कीजिए।

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो।

प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है।

**PART – C (खण्ड – स)**

[Marks: 20]

*Attempt any two questions.*

*Answer should not exceed 300 words. Each question is of 10 marks.*

कोई दो प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 300 शब्दों से अधिक न हो।

प्रत्येक प्रश्न 10 अंक का है।

## PART – A / खण्ड – अ

- Q.1 (i) State Cayley – Hamilton theorem.  
कैली – हेमिल्टन प्रमेय का कथन लिखिए।
- (ii) What is Ferrari’s method?  
फैरारी विधि क्या है?
- (iii) What do you mean by order of an element of a group?  
समूह के किसी अवयव की कोटि से आप क्या समझते हो?
- (iv) Define cyclic group.  
चक्रीय समूह को परिभाषित कीजिए।
- (v) Let  $G$  be a group and  $a \in G$ , then show that  $O(a) = O(a^{-1})$   
माना  $G$  एक समूह है और  $a \in G$ , तब दर्शाइये कि  $O(a) = O(a^{-1})$
- (vi) What do you mean by simple group?  
सरल समूह से आप क्या समझते हैं?
- (vii) Find the quotient group  $G/N$  when -  
 $G = \langle \{1, -1, i, -i\}, o \rangle$  and  $N = \langle \{1, -1\}, o \rangle$   
विभाग समूह  $G/N$  ज्ञात कीजिए जबकि –  
 $G = \langle \{1, -1, i, -i\}, o \rangle$  तथा  $N = \langle \{1, -1\}, o \rangle$
- (viii) Define isomorphism for groups.  
ग्रुप के लिये तुल्यकारिता परिभाषित कीजिए।
- (ix) Define Right Coset.  
एक दक्षिण सहसमुच्चय को परिभाषित कीजिए।
- (x) What do you understand by group homomorphism?  
समूह समाकारिता से आप क्या समझते हैं?

## PART – B / खण्ड – ब

### UNIT – I / इकाई – I

Q.2 Show that every square matrix can be expressed uniquely as the sum of Hermitian and a Skew Hermitian matrix.

दर्शाइये कि प्रत्येक वर्ग मैट्रिक्स की एक हर्मीशियन तथा एक विषम हर्मीशियन मैट्रिक्स के योग के रूप में अद्वितीय प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है।

Q.3 Reduce the following matrix in the normal form and find its Rank :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 9 & 12 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

निम्न मैट्रिक्स को अभिलंब रूप में समानीत कर इसकी कोटि ज्ञात कीजिए।

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 9 & 12 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

### UNIT – II / इकाई – II

Q.4 Solve the equation  $27x^3 + 42x^2 - 28x - 8 = 0$  the roots being in G.P.

समीकरण  $27x^3 + 42x^2 - 28x - 8 = 0$  को हल कीजिए जबकि मूल गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

Q.5 Solve the following reciprocal equation:

निम्न व्युत्क्रम समीकरण को हल कीजिए—

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$$

### UNIT – III / इकाई – III

Q.6 Show that for any element 'a' of a group G :

$$O(a) = O(x^{-1}ax), \forall x \in G$$

प्रदर्शित कीजिए कि एक समूह G के किसी अवयव a के लिए  $O(a) = O(x^{-1}ax), \forall x \in G$

Q.7 Show that the order of every element of a finite group is finite and less than or equal to the order of the group.

सिद्ध कीजिए कि किसी परिमित समूह के प्रत्येक अवयव की कोटि परिमित होती है तथा यह या तो समूह की कोटि के बराबर होती है या इससे कम।

### UNIT – IV / इकाई – IV

Q.8 If H and K are two normal subgroups of G, then show that HK is also a normal subgroup of G.

यदि H और K किसी समूह G के दो विशिष्ट उपसमूह हैं, तो सिद्ध कीजिए कि HK भी समूह G का एक विशिष्ट उपसमूह है।

Q.9 Find the quotient group  $G/H$  where  $G = (z, +)$  and  $H = (uz, +)$ . Also prepare the composition table of  $G/H$ .

समूह  $G/H$  का विभाग समूह ज्ञात कीजिए, जहाँ  $G = (z, +)$  एवं  $H = (uz, +)$  हैं।

### UNIT -V / इकाई - V

Q.10 Prove that the relation of isomorphism " $\cong$ " in the set of all groups is an equivalence relation.

सिद्ध कीजिए कि समूहों के समुच्चय में तुल्याकारिता का संबंध " $\cong$ " एक तुल्यता संबंध होता है।

Q.11 Find a regular permutation group isomorphic to the multiplicative group  $G = \{1, -1, i, -i\}$

गुणन संक्रिया वाले समूह  $G = \{1, -1, i, -i\}$  का क्रमचय समूह ज्ञात कीजिए, जो कि  $G$  के साथ तुल्यकारी हो।

### PART - C / खण्ड - स

Q.12 Find the Eigen values and corresponding Eigen vectors of the following matrix:

निम्न मैट्रिक्स के अभिलाक्षणिक मूलों एवं उसके संगत सदिशों को ज्ञात कीजिए—

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Q.13 Solve by Ferrari's method.

$$x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 24x + 15 = 0$$

फैरारी विधि से हल कीजिए —

$$x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 24x + 15 = 0$$

Q.14 Show that every infinite cyclic groups has two and only two generators.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अपरिमित चक्रीय समूह के दो और केवल दो ही जनक होते हैं।

Q.15 Prove that any two left cosets of a subgroup are either identical or disjoint.

सिद्ध कीजिए कि किसी उपसमूह के कोई दो वाम सहसमुच्चय या तो सर्वसम होते हैं या अयुक्त।

Q.16 Show that every finite group is isomorphic to some permutation group.

दर्शाइये कि प्रत्येक परिमित ग्रुप किसी क्रमचय ग्रुप के तुल्यकारिक होता है।